1 Εισαγωγή(Μικρή!)

Κλείνοντας τον πρώτο κύκλο του επιτυχημένου[1] κύκλου σεμιναρίων 42 θα μιλήσουμε (όπως λέει και ο τίτλος) για ... κηπουρική, στα μαθηματικά βέβαια! Η δικιά μας κηπουρική περιλαμβάνει μπουκέτα, θάμνους, δέντρα και δάση (φυσικά!). Για όσους δεν γνωρίζουν και για να μην θεωρήσετε ότι αυτά που λέμε είναι τελείως σαχλαμάρες, σημειώνουμε ότι υπάρχουν δεκάδες εφαρμογές αυτών που θα παρουσιάσουμε εκτός (προς το παρών!) από τον πρωτότυπο (!!) ορισμό που θα δώσουμε στο τέλος (τον περίφημο *G-Bush jr*).

Τα παρακάτω αποτελούν αντικείμενο της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων, παρόλα αυτά τα χρησιμοποιούν και οι πληροφορικάριοι! Επίσης, συγκεκριμένα δέντρα εμφανίζονται στην επιχειρησιακή έρευνα και ειδικότερα στις ουρές αναμονής και στις στοχαστικές ανελίξεις. Τέλος αποτελούν παραδείγματα για πολλές από τις νέες θεωρίες της αλγεβρικής τοπολογίας (*υπερβολικοί χώροι, CAT(0) χώροι*).

2 Δέντρα

Τα δέντρα αποτελούν ... σύγχρονη(!!) εφεύρεση(!!) της μαθηματικής κοινότητας. Είναι μια απλή (σχετικά) μορφή γραφημάτων την οποία μελέτησαν πολλοί μαθηματικοί κατά την διάρκεια των τελευταίων ετών. Τα παρακάτω προέρχονται από την θεωρία των *Bass-Serre* που θεμελιώνουν τόσο τα γραφήματα όσο και τα δέντρα.[2] 'Οποιος έχει διαβάσει το βιβλίο του Serre *Trees* τώρα θα αρχίσει να βαριέται[3]! Πριν να κάνουμε λοιπόν κηπουρική ας δούμε τι είναι ένα γράφημα.

Ορισμός 2.1 *Ένα <u>γράφημα (graph)</u>* [4] *Γ αποτελείται από δύο σύνολα:*

1. $\Gamma_0 = V = \{\textit{κορυφές τού } \Gamma\}$
2. $\Gamma_1 = E = \{\textit{ακμές του } \Gamma\}$

και δύο συναρτήσεις:

1. $(o,t) : E \to V \times V$ *με* $l \to (o(l), t(l))$ *όπου* $o(l)$ *ονομάζεται αρχική κορυφή και* $t(l)$ *τελική κορυφή της ακμής* l*.*
2. $- : E \to E$ *με* $l \to \bar{l}$ *η αντίθετη ακμή της* l*.*

[1] Η επιτυχία θα φανεί στο τέλος

[2] Ναι ένα δέντρο εκτός από τις ρίζες του μπορεί να θεμελιωθεί και μαθηματικά!

[3] Μπορεί και να φύγει αν θέλει κακία δεν κρατάμε!

[4] Βαρετό ε? Θα μπορούσε κανείς να πει απλά ότι ένα γράφημα είναι ένα σύνολο κορυφών και ένα σύνολο ακμών που έχουν για άκρα κορυφές! Και αυτό πείθει!

τέτοια ώστε:

i) $\bar{\bar{l}} = l$

ii) $\bar{l} \neq l$

iii) $o(l) = t(l)$

Μια γεωμετρική ακμή είναι το ζεύγος $\{l, \bar{l}\}$ (μια ακμή και η αντίθετή της).

Και τώρα κάτι που απο κηπουρικής απόψεως δεν είναι σωστό. Θα ορίσουμε ένα μονοπάτι πανω σε ένα δέντρο![5]

Ορισμός 2.2 *Έστω Γ ένα γράφημα (προφανώς και σε ένα δέντρο). Ένα μονοπάτι $\overline{p}$ μήκους n είναι μια ακολουθία n διαδοχικών κορυφών $p_1, p_2, ..., p_n$ οι οποίες συνδέονται διαδοχικά με τις ακμές $[p_1, p_2], [p_2, p_3], ...[p_{n-1}, p_n]$. Δεχόμαστε ότι $p_i \neq p_{i+1}$*[6]

Ορισμός 2.3 *Ένα γράφημα θα λέγεται συνεκτικό αν για κάθε δύο κορυφές του υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει. Πιο απλά (βλέπε παραδώσεις Β.Νεστορίδη) είναι κάτι ... μονοκόμματο!*

Επίσης κάτι που επίσης δεν παρατηρείται στα αληθινά δέντρα αλλά τελικά ούτε στα μαθηματικά δέντρα: Το κυκλικό μονοπάτι!

Ορισμός 2.4 *Ένα μονοπάτι θα λέγεται κυκλικό αν $p_1 = p_n$.*

Μπορεί κανείς μετά από αυτά εύκολα να μαντέψει τον ορισμό του δέντρου:

Ορισμός 2.5 *Δέντρο ονομάζεται ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κυκλικά μονοπάτια.*

Το δέντρο δεν είναι συνεκτικό απλώς. Για κάθε δύο κορυφές του υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που τις συνδέει. Αυτός είναι και ένας δεύτερος ισοδύναμος ορισμός του δέντρου (σκεφτείτε το λίγο όλα εμείς θα τα λέμε?).

Από κάθε κορυφή ενός δέντρου ενδέχεται να ξεκινούν άπειρες ακμές (αριθμήσιμες ή μη). Ιδιαίτερη σημασία [7] έχουν τα δέντρα για τα οποία οι ακμές που ξεκινούν από κάθε κορυφή έχουν σταθερό πλήθος. Ορίζουμε λοιπόν:

Ορισμός 2.6 *Δείκτης της κορυφής v ενός δέντρου είναι το πλήθος των ακμών που έχουν ως κορυφή την v. Συμβολίζεται με $card(v)$ ή $i(v)$.*

[5] φαντάζεστε αναρίχηση στο μονοπάτι του τάδε δέντρου !

[6] μια ακμή [α,α] λέγεται θηλιά (loop) Εδώ όμως δεν είναι άγρια δύση οπότε θηλιές και δέντρα δεν συμβαδίζουν!

[7] η 'ιδιαίτερη σημασία' δεν είναι τίποτα άλλο από την άγνοια των γραφόντων για τα υπόλοιπα δέντρα

Έτσι έρχεται φυσιολογικά ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός 2.7 *Ένα δέντρο λέγεται τοπικά πεπερασμένο αν για κάθε κορυφή του*

$$i(v) < \infty$$

Το παραπάνω δεν σημαίνει ότι για ένα τοπικά πεπερασμένο δέντρο υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $i(v) < M$. Πράγματι το απλό παράδειγμα του *αυξητικού δέντρου* (βλέπε πίνακα !!!) καταρρίπτει αυτήν την θεώρηση. Έτσι προκύπτει η ανάγκη και άλλων ορισμών (δεν γεμίζουν και εύκολα οι σελίδες ...).

Ορισμός 2.8 *Ονομάζουμε ένα δέντρο n-δέντρο αν από κάθε κορυφή του ξεκινούν ακριβώς n ακμές.*

Άρα ορίζεται το 3-δέντρο το 4-δέντρο κτλ. Παράδειγμα ενός 4-δέντρου είναι το γράφημα Cayley της ελεύθερης ομάδας με δύο γεννήτορες.

Ερώτηση 2.1 *Ποιό είναι το άπειρο 2-δέντρο ??? (ΟΕΟ!)*

Όπως οι περισσότεροι από εμάς ξέρουν σε ένα δέντρο υπάρχει πάντα ρίζα ή μήπως όχι? (Οι γνώσεις των γραφόντων δεν μπορούν να απαντήσουν σε μια τόσο εξωτική ερώτηση!)

Ορισμός 2.9 *Ένα δέντρο T λέγεται* rooted δέντρο *ανν υπάρχει μια διακεκριμμένη κορυφή από την οποία ξεκινούν όλες οι κατευθύνσεις των ακμών που αντιστοιχούν σε αυτήν.*

Έτσι αν e είναι η ρίζα του δέντρου τότε έχουμε: (ΒΑΛΕ ΕΝΑ ROOTED ΔΕΝΤΡΟ)

Πρόταση 2.1 *Κάθε δέντρο είναι rooted αν δεν μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός του!*

Απόδειξη. Το αρπάζουμε από μια κορυφή και το σέρνουμε![8] ■
Ειδική βαρύτητα κυρίως για την θεωρία γραφημάτων και τους υπολογιστές έχει το λεγόμενο *Binary δέντρο* το οποίο είναι γνωστό με διάφορους ορισμούς! (είναι σεσημασμένο οπότε έχει πολλά ονόματα!)

Ορισμός 2.10 Binary tree (δυαδικό δέντρο) *λέγεται το rooted tree που εκτός από την ρίζα του που έχει $i(e) = 2$ όλες οι άλλες κορυφές του έχουν $i(v) = 3$.*

Παρατήρηση 2.1 *Το δυαδικό δέντρο είναι γνωστό και ώς* Yes-No tree, Red-Black tree, $0 - 1$ tree[9]

Ορισμός 2.11 *Ένα δέντρο γίνεται μετρικός χώρος αν θέσουμε το μήκος κάθε ακμής 1. Τότε η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών θα είναι $\delta(v, u) = n$ όπου n το πλήθος των κορυφών του μονοπατιού[10] $p_0, p_1, ..., p_n$ με $p_0 = v$ και $p_n = u$.*

[8] Προφανώς!

[9] ή Μπάμπης Σουγιάς ή Αντώνης Πεταλούδας ...

[10] υπάρχει πάντα ένα τέτοιο και είναι μοναδικό!(Αυτή είναι και η μόνη σοβαρή παρατήρηση!)

Παρατήρηση 2.2 *Με την παραπάνω μετρική το δέντρο T γίνεται γεωδαισιακός μετρικός χώρος.*

Ορισμός 2.12 *Ένα δέντρο λέγεται φραγμένο αν υπάρχει κορυφή $v \in V(T)$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $T \subseteq B(v, r)$.*

Σχόλιο 2.1 *Κάθε δέντρο είναι*[11]*:*

1. *1-skeleton*
2. *συνεκτικό*
3. *συσταλτό*
4. *απλά συνεκτικό*
5. *rooted*
6. *συνδυαστικό*
7. *τοπικά συνεκτικό*
8. *κατά τόξα συνεκτικό*
9. *γεωδαισιακός μ.χ.*
10. *κατευθυνόμενο*
11. *υπερβολικός μετρικός χώρος*
12. *aspherical*
13. *genus 0*
14. *Riemman Manifold*
15. *τοπολογικής διάστασης 1*
16. *ασυμπτωτικής διάστασης* ≤ 1
17. *συνσυμπαγικό (cocobounded!)*
18. $T_0 - T_6$
19. *cut-pointed*
20. *γνήσιο*
21. *CAT(0)*

[11] Παρατηρούμε ότι $21 = \frac{42}{2}$ δεν είναι τυχαίο αυτό προσπαθήσαμε πολύ!

3 ΔΑΣΟΣ

Το φυσιολογικό αφού κάποιος έχει ορίσει την έννοια του δέντρου είναι να γενικεύσει! Προς το παρόν οι μαθηματικοί έχουν γενικεύσει ως προς την ποσότητα. Εμείς θα γενικεύσουμε και ως προς την ποιότητα. Ας δούμε λοιπόν μια έννοια που ενώ φαίνεται απλή είναι πολύ χρήσιμη τελικά.

Ορισμός 3.1 *Δάσος θα ονομάζουμε ένα γράφημα στο οποίο δεν περιέχονται κυκλικά μονοπάτια.*

Μοιάζει με τον ορισμό του δέντρου αλλά κάτι του λείπει. Δεν είναι συνεκτικό. Μπορεί οπότε κανείς να παρατηρήσει το εξής:

Παρατήρηση 3.1 *Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα!*[12]

Και τώρα κάτι που τρελαίνει κηπουρούς και γλωσσολόγους:

Παρατήρηση 3.2 *Ένα δέντρο είναι δάσος και ένα συνεκτικό δάσος είναι δέντρο!*[13]

Ένα παράδειγμα δάσους είναι το παρακάτω: (PICTURE DASOS!!!!!!!!!!!!!!!!!) Τα δάση εμφανίζονται ως γραφήματα διπροτύπων και αποτελούν χώρους στους οποίους δρουν ελεύθερα γινόμενα ομάδων. Επίσης εμφανίζονται σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων από πολλούς υπολογιστές συνδεδεμένους ταυτόχρονα. Αποτελούν μέρος της σύγχρονης αλγεβρικής τοπολογίας και της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων.

4 ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΟΜΑΔΕΣ, ΜΠΟΥΚΕΤΑ ΚΑΙ ΔΕΝΤΡΑ ΟΜΑΔΩΝ

Θα ασχοληθούμε τώρα λίγο με τις ελεύθερες ομάδες, θα ορίσουμε το ελεύθερο γινόμενο ομάδων και το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα.

Καταρχάς θα υπενθυμίσουμε ότι η ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες (συμβολ. $\mathbb{F}_n$) είναι η ομάδα που παράγεται από n στοιχεία τα οποία δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους, εκτός από αυτές που ορίζει μια ομάδα (όπως π.χ ότι $(x^{-1})^{-1} = x \ \forall x$ κ.λ.π). Το πιο απλό παράδειγμα είναι βέβαια για $n = 1$, η $\mathbb{F}_1 \cong \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι οι ομάδες που είναι ισόμορφες με την $\mathbb{Z}$ είναι και οι μοναδικές ελεύθερες ομάδες που είναι αβελιανές. Ανάλογα ορίζεται και η $\mathbb{F}_\infty$, η ελεύθερη ομάδα με άπειρους γεννήτορες.

Ερώτηση 4.1 *Ποια η σχέση των ελεύθερων ομάδων με την κηπουρική;*

[12] σιγά για νέο μας το λες!
[13] απίστευτο !

Αν θεωρήσουμε ένα μπουκέτο (...από ας πούμε n κύκλους) τότε η θεμελιώδης ομάδα του είναι η ελεύθερη βαθμού n.

Δηλαδή: π_1(n-μπουκέτο)=$\mathbb{F}_n$.

Ετσι, για παράδειγμα η θεμελιώδης ομάδα του 8 είναι η $\mathbb{F}_2$![14]

Τωρα...

" ΑΥΤΑ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΔΥΣΚΟΛΑ ΚΑΙ ΔΕΝ ΘΑ ΤΑ ΕΞΗΓΗΣΟΥΜΕ... ΑΠΛΑ ΤΑ ΓΡΑΦΟΥΜΕ. "

Π.Σ.

Ορισμός 4.1

- *Έστω G ομάδα που δρα σε ένα γράφημα X. Μια αναστροφή είναι ένα ζευγάρι (g, y) όπου $g \in G$ και $y \in E(X)$ τέτοιο ώστε $g \cdot y = \bar{y}$. Αν δεν υπάρχουν τέτοια ζευγάρια, λέμε ότι η G δρα χωρίς αναστροφές.*

- *Αν G που δρα στο γράφημα X χωρίς αναστροφές, τότε ορίζουμε το γράφημα πηλίκο ως εξής:*

  $V(X/G) = \{[v] : v \in V(X)\}$, *όπου* $[v] = \{gv | g \in G\}$, *η τροχιά του* v.

  $E(X/G) = \{[y] : y \in E(X)\}$, *όπου* $[y] = \{gy | g \in G\}$, *η τροχιά του* y.

  και $o([y]) = [o(y)]$, $t([y]) = [t(y)]$, $\bar{[y]} = [\bar{y}]$ *και ισχύει ότι* $[\bar{y}] \neq [y]$ *αφού η* G *δρα χωρίς αναστροφές.*

- *Μια ομάδα G λέμε ότι δρα ελεύθερα σε ένα γράφημα αν η G δρα χωρίς αναστροφές και η σταθεροποιούσα κάθε κορυφής είναι η τετριμμένη ομάδα.*

Και ένα Θεώρημα που συνδέει ελεύθερες ομάδες και δέντρα:

Θεώρημα 4.1 *Μια ομάδα που δρα ελεύθερα σε ένα δέντρο είναι ελεύθερη.*

Ισχύει και το αντίστροφο, αφού το Caley γράφημα μιας ελεύθερης ομάδας είναι δέντρο.

Ορισμός 4.2 *Έστω G ομάδα που δρα σε ένα γράφημα X.*

Θεμελιώδες πεδίο της δράσης είναι ένα υπογράφημα του X, έστω T, τέτοιο ώστε $T \cong X/G$.

[14]όπως βεβαια και η θεμεελιώδης ομάδα του ∞!!

Ορισμός 4.3 *Έστω G_1, G_2 δυο (πεπερασμένα παριστώμενες) ομάδες. Τότε ορίζεται μια νέα ομάδα, το ελεύθερο γινόμενο των G_1, G_2, ως εξής: Αν $G_1 =< S_1|R_1 >, G_2 =< S_2|R_2 >$ τότε $G_1 * G_2 =< S_1 \sqcup S_2 \,|\, R_1 \sqcup R_2 >$.*

Μπορούμε να γενικεύσουμε το ελεύθερο γινόμενο ως εξής:

Υποθέτουμε ότι οι ομάδες H, K έχουν μια ισόμορφη υποομάδα M, δηλαδή υπάρχουν μονομορφισμοί $\sigma : M \to H$ και $\tau : M \to K$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε την πιο "ελεύθερη" ομάδα που μπορούμε έτσι ώστε: να περιέχει τις H και K και επιπλέον οι υποομάδες $\sigma(M)$ και $\tau(M)$ να ταυτίζονται (και άρα να ισχύει $H \cap K = \sigma(M) = \tau(M)$).

Όπως κάναμε και με το ελεύθερο γινόμενο, θα αποφύγουμε να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό και θα δούμε πιο απλά δεδομένων δυο ομάδων H και K τι παράσταση έχει μια ομάδα με τις παραπάνω ιδιότητες.

Ορισμός 4.4 *Έστω $H =< S|D >, K =< T|E >$ και $M =< Q|V >$ ώστε να υπάρχουν μονομορφιμοί $\sigma : M \to H$ και $\tau : M \to K$. Το ελεύθερο γινόμενο των H, K με αμάλγαμα M (συμβολισμός $H *_M K$) είναι η ομάδα με παράσταση:*

$$H *_M K =< S \sqcup T \,|\, D \sqcup E, \sigma(q) = \tau(q) \ \forall q \in Q >$$

Παρατηρούμε ότι αν η ομάδα M είναι τετριμμένη, τότε το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $H *_M K$ είναι απλά το ελεύθερο γινόμενο των H, K, δηλαδή ισχύει $H *_{\{e\}} K = H * K$.

Ένα απλό παράδειγμα:

Θεωρούμε δυο άπειρες κυκλικές ομάδες $H =< c|- >$ και $K =< d|- >$ και αντίστοιχα δυο υποομάδες τους: $A =< c^2 >$ και $B =< d^3 >$ οι οποίες είναι ισόμορφες μέσω του $c^2 \mapsto d^3$.

Τότε το ελ.γιν με αμάλγαμα είναι η ομάδα: $H *_{A=B} K < c, d \,|\, c^2 = d^3 >$.

Θεώρημα 4.2 *Έστω G ομάδα που δρα σε ένα γράφημα X με θεμελιώδες πεδίο την ακμή $y \in E(X)$, $o(y) = P$, $t(y) = Q$. Θέτουμε:*

$G_P = Stab(P) \ (= \{g \in G : gP = P\}$

$G_Q = Stab(Q)$

$G_y = Stab(y)$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το X είναι δέντρο*

2. *Ο ομομορφισμός $\phi : G_P *_{G_y} G_Q \to G$ που επάγεται από τις εμφυτεύσεις $G_P \hookrightarrow G,\ G_Q \hookrightarrow G,\ G_y \hookrightarrow G$ είναι ισομορφισμός.*

Θεώρημα 4.3 *Έστω $G = G_1 *_A G_2$. Τότε υπάρχει μοναδικό δέντρο T στο οποίο δρα η G με θεμελιώδες πεδίο μια ακμή $y \in E(X)$, $o(y) = P$, $t(y) = Q$ έτσι ώστε:*
$Stab(P) = G_1$
$Stab(Q) = G_2$
$Stab(y) = A$.

Επιτέλους είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του δέντρου ομάδων και (κυρίως) να δούμε ένα πολύ απλό παράδειγμα.

Ορισμός 4.5 *Έστω G ομάδα και T δέντρο. Ένα δέντρο ομάδων (G, T) δίνεται από τα εξής:*

- *Σε κάθε κορυφή $P \in V(T)$ αντιστοιχεί μια ομάδα G_P*
- *Σε κάθε ακμή $y \in V(T)$ αντιστοιχεί μια ομάδα G_y*
- *Μονομορφισμούς $G_y \to G_{t(y)}$*

Για παράδειγμα, ένα αμάλγαμα $A *_C B$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα δέντρο ομάδων.

5 ΘΑΜΝΟΣ - ΚΥΡΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ορισμός 5.1 *Θεωρούμε την $\mathbb{F}_\infty$ και το Cayley γράφημα της Γ. Έστω $r \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε μπάλα B(e,r) [15] με κέντρο το e ακτίνα r. Το $B = B(e, r)$ λέγεται r-θάμνος (r-bush στην ξένη βιβλιογραφία!)*

Ο ορισμός θα ήταν ... γυμνός αν δεν τον περιέβαλλε η κατάλληλη δράση.

Ορισμός 5.2 *Εστω G τυχαία ομάδα που δρα στο γράφημα Cayley της $\mathbb{F}_\infty$. Η δράση $\delta : G \times \Gamma \to \Gamma$ έχει την ιδιότητα $\delta(G \times B(e, r)) \subset B(e, r)$ λέγεται τύπου j. Τότε η μπάλα $B(e, r)$ γίνεται G-σύνολο που ονομάζεται ... G-Bush $j - r$!*

Μια από τις πολλές , προς το παρόν ανεξερεύνητες φανταστρουμφικές ιδιότητες του G-Bush $j - r$ είναι σίγουρα και η γρήγορη λύση που δίνει στην εικασία του Riemman οπότε η διασύνδεση με την ζήτα του Riemman είναι προφανής! Έτσι ο πρώτος κύκλος του 42 κρίνεται επιτυχής!

[15] Που είναι η γυάλα ? ΟΕΟ.